ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION 1982

OPTION P'

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 heures)

***

I

1°/ Soient g et h deux fonctions numériques définies, continues et strictement positives sur l'intervalle $[a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$, et dont le quotient a pour limite 1 à l'infini.

Montrer l'équivalence à l'infini des fonctions $x \longmapsto \int_x^{+\infty} g(t)\,dt$ et $x \longmapsto \int_x^{+\infty} h(t)\,dt$ si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, et l'équivalence à l'infini des fonctions $x \longmapsto \int_a^x g(t)\,dt$ et $x \longmapsto \int_a^x h(t)\,dt$ si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.

2°/ Soit f une fonction numérique définie, strictement positive et continûment dérivable sur $[a, +\infty[$. On suppose en outre que $\lim_{x \to +\infty} \frac{x f'(x)}{f(x)} = \alpha \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{\operatorname{Log} x} = \alpha$.

b) Si $\alpha < -1$, établir la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et l'équivalence à l'infini des fonctions $x \longmapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ et $x \longmapsto -\frac{x f(x)}{\alpha + 1}$.

c) Si $\alpha > -1$, établir la divergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et l'équivalence à l'infini des fonctions $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ et $x \longmapsto \frac{x f(x)}{\alpha + 1}$.

d) Montrer par des exemples que, dans le cas où $\alpha = -1$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ peut converger ou diverger selon le choix de f.

.../...

3°/ Donner un exemple d'une fonction numérique φ définie, strictement positive et continûment dérivable sur $[\,a\,,+\infty\,[$, telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{Log}\varphi(x)}{\operatorname{Log} x} = \alpha \neq -1$, avec une intégrale $\int_a^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ divergente sans que les fonctions $x \longmapsto \int_a^x \varphi(t)\,dt$ et $x \longmapsto \frac{x\,\varphi(x)}{\alpha+1}$ soient équivalentes à l'infini.

II

Dans toute cette partie, U est une série divergente à termes strictement positifs notés u_n $(n \in \mathbb{N})$; s_n désigne la somme de rang n de U et on convient que $s_{-1} = 0$. En outre f est une fonction numérique définie, continue, décroissante et strictement positive sur $[\,0\,,+\infty\,[$ et on note V et V' respectivement les séries de termes généraux $u_n f(s_n)$ et $u_n f(s_{n-1})$.

1°/ Que peut-on dire de la série V si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ? Que peut-on dire de la série V' si cette intégrale diverge ?

2°/ Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

a) Comparer les natures de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, de la série V et de la série V'.

b) Dans le cas où la série V' diverge, sa somme de rang n est-elle équivalente à la somme de rang n de la série V ?

c) Si f est continûment dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ avec $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\,f'(x)}{f(x)} = \alpha < -1$, donner à l'aide de f, de s_n et de α un équivalent simple du reste de rang n de la série V. Le reste de rang n de la série V' admet-il le même équivalent ?

d) Dans le cas où $f(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in [\,0\,,+\infty\,[$, montrer par un exemple que les séries V et V' peuvent être simultanément convergentes sans que leurs restes de même rang soient équivalents.

3°/ Dans cette question, on suppose que la fonction $x \longmapsto \frac{\operatorname{Log} f(x)}{\operatorname{Log} x}$ est croissante au voisinage de l'infini et que la suite $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée ou non.

.../...

a) Quel est le signe de $\text{Log } f(x)$ au voisinage de l'infini ? Pour tout couple (x, y) de réels assez grands et tels que $x \leqslant y$, établir l'inégalité

$$\text{Log } f(x) - \text{Log } f(y) \leqslant \frac{\text{Log } f(x)}{\text{Log } x} (\text{Log } x - \text{Log } y).$$

b) Etablir que les séries V et V' sont de même nature.

c) Si de plus $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, trouver, à l'aide d'intégrales portant sur f, un équivalent à la somme de rang n de V lorsque cette série diverge et un équivalent à son reste de rang n lorsqu'elle converge. Ces équivalents conviennent-ils également pour la somme de rang n de V' dans le cas de la divergence et pour le reste de rang n de V' dans le cas de la convergence ?

d) Trouver, lorsque n tend vers $+\infty$, des équivalents pour les suites $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k s_k^{\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\alpha < -1$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k s_k^{\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\alpha \in]-1, 0[$, la limite de la suite $(s_{n+1}/s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant encore supposée égale à 1.

4°/ Dans cette question, on ne suppose plus la croissance au voisinage de l'infini de la fonction $x \longmapsto \frac{\text{Log } f(x)}{\text{Log } x}$, ni que la suite $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

a) Montrer qu'on peut toujours choisir U de façon que la série V' diverge. Donner un exemple d'un tel choix lorsque f est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{(x+1)^2}$; la série V converge-t-elle dans ce cas ?

b) Montrer que si la série V converge, la suite $(s_n f(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer en sens inverse que si $\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0$, on peut choisir U de façon que la série V converge.

c) Donner un exemple d'un couple d'une série U et d'une fonction f tel que V converge et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail